

一种新的 PML 构造及其在 FDTD 方法中的应用

李清亮

(中国电波传播研究所,河南新乡 453003)

摘要: 完全匹配层(PML)吸收边界在处理开域问题的时域有限差分(FDTD)方法中已得到广泛应用.本文从PML中分裂场特性出发,提出一种新的PML构造,该构造中仅有八个子区且无角区.另外,采用降维方法对PML中分裂场进行存储,有效地节省计算内存.三维数值测试结果表明,构造的八层PML反射本地误差约为-160dB.另外,金属球散射截面模拟计算结果证实了新PML构造的实用性.

关键词: 完全匹配层; 时域有限差分方法

中图分类号: TN011 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2002) 09-1396-04

A New PML Construction for Use with the FDTD Method

LI Qing-liang

(China Research Institute of Radiowave Propagation, Xinxiang, Henan 453003, China)

Abstract: The perfectly matched layer (PML) is a highly accurate approach to the finite difference time-domain (FDTD) mesh truncation. However, the PML does enhance increase the computational complexity and the memory requirement for the FDTD simulation. In this paper, we propose a new PML construction based on the properties of the split fields in the PML region. The construction only contains eight PML subsections without corners. Also, we transform a three-dimensional split field component to a two-dimensional array in order to save computer memory. Verifications of the PML construction are provided with numerical examples.

Key words: perfectly matched layer; finite difference time-domain method

1 引言

完全匹配层(Perfectly Matched Layer: PML)吸收边界是 Berenger^[1]于1994年首先提出的. PML是由数学上构造出的各向异性吸波层,通过对其电磁参量的合适选取,能够使得由FDTD计算区域发出的外行波无反射地透入PML,并在其中迅速衰减.与Mur二阶吸收边界条件^[2]相比,PML不受来波方向和频率限制.

直角坐标系中PML是由六块平板构成的腔体,平板间相互交叉分别形成面、棱及角共26个PML子区^[3].另外,在PML中每一个电场和磁场分量要分裂为两个子分量,由于这些子分量在当前位置随时间步进,所以象场分量一样必须对其事先开辟存储空间(数组).直接的方法是将子分量的存储空间设置成与对应的场分量的存储空间相同,但这将导致计算机内存的大量浪费,因为子分量仅仅存在于PML区中.

本文首先从PML中FDTD步进方程出发,依据分裂场特性提出一种新的PML构造,该构造中仅有八个子区且无角区.在FDTD方法的落实中,为节省计算内存,采用降维方法对PML中分裂场进行存储.最后,对新构造的PML吸收性能进行数值测试,并以一个金属球的散射模拟验证其实用性.

2 PML 构造

在拉伸(stretch coordinate)坐标系^[4]中,自由空间频域Maxwell方程可修正为

$$\nabla_s \times E = -j\omega\mu_0 H \quad (1)$$

$$\nabla_s \times H = -j\omega\epsilon_0 E \quad (2)$$

其中

$$\nabla_s = \hat{x} \frac{1}{s_x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{1}{s_y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{1}{s_z} \frac{\partial}{\partial z} \quad (3)$$

s_η ($\eta = x, y, z$) 为 η 方向上的拉伸坐标复变量,

$$s_\eta = \begin{cases} 1 + \frac{\sigma_{P\eta}(\eta)}{j\omega\epsilon_0}, & \text{在 PML 内} \\ 1, & \text{其它} \end{cases} \quad (4)$$

实际应用中一般选择

$$\sigma_{P\eta} = \sigma_{\max} \left(\frac{\eta - \eta_0}{d} \right)^2, \eta = x, y, z \quad (5)$$

d 为 PML 的厚度, σ_{\max} 由理论反射数 R_{th} 导出

$$R_{th} = \exp(-2\eta_0 \sigma_{\max} d/3) \quad (6)$$

在PML中(1)和(2)可分裂成12个方程,

$$-\frac{\partial E_y}{\partial x} = (j\omega\mu_0 + \sigma_{px}^*) H_{zx} \quad (7-1)$$

收稿日期:2002-06-11;修回日期:2002-01-25

基金项目:国防基础科研基金资助项目

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = (j\omega\mu_0 + \sigma_{px}^*) H_{xy} \quad (7-2)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} = (j\omega\mu_0 + \sigma_{py}^*) H_{zy} \quad (7-3)$$

$$-\frac{\partial E_z}{\partial y} = (j\omega\mu_0 + \sigma_{py}^*) H_{xy} \quad (7-4)$$

$$-\frac{\partial E_x}{\partial z} = (j\omega\mu_0 + \sigma_{pz}^*) H_{yz} \quad (7-5)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} = (j\omega\mu_0 + \sigma_{pz}^*) H_{xz} \quad (7-6)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} = (j\omega\mu_0 + \sigma_{px}) E_{zx} \quad (7-7)$$

$$-\frac{\partial H_z}{\partial x} = (j\omega\mu_0 + \sigma_{px}) E_{yx} \quad (7-8)$$

$$-\frac{\partial H_x}{\partial y} = (j\omega\mu_0 + \sigma_{py}) E_{zy} \quad (7-9)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} = (j\omega\mu_0 + \sigma_{py}) E_{xy} \quad (7-10)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} = (j\omega\mu_0 + \sigma_{pz}) E_{yz} \quad (7-11)$$

$$-\frac{\partial H_y}{\partial z} = (j\omega\mu_0 + \sigma_{pz}) E_{zx} \quad (7-12)$$

其中 $\sigma_{pq}^* = \mu_0 \sigma_{pq} / \epsilon_0$ ($\eta = x, y, z$), E_{xy} 和 E_{xz} , E_{yx} 和 E_{yz} , H_{xz} 和 H_{xy} , H_{xz} 和 H_{yz} , H_{yx} 和 H_{zy} 为 PML 内的 12 个场子分量.

对方程(7-1)~(7-12)采用中心差分,取 $\delta = \Delta x = \Delta y = \Delta z$ 和 $c\Delta t = \delta/2$,并取规约化磁场 $H_{N\eta} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} H_\eta = Z_0 H_\eta$ ($\eta = x, y, z$), Z_0 为自由空间波阻抗,可得到 PML 内 FDTD 步进方程,以 E_x 和 H_x 为例有

$$E_{xy}^{n+1}(i + \frac{1}{2}, j, k) = A_{py}(i + \frac{1}{2}, j, k) \cdot E_{xy}^{n+1}(i + \frac{1}{2}, j, k) + B_{py}(i + \frac{1}{2}, j, k) \cdot [H_{Nz}^{n+1/2}(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k) - H_{Nz}^{n+1/2}(i + \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2}, k)] \quad (8-1)$$

$$E_{xz}^{n+1}(i + \frac{1}{2}, j, k) = A_{pz}(i + \frac{1}{2}, j, k) \cdot E_{xz}^{n+1}(i + \frac{1}{2}, j, k) - B_{pz}(i + \frac{1}{2}, j, k) \cdot [H_{Ny}^{n+1/2}(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}) - H_{Ny}^{n+1/2}(i + \frac{1}{2}, j, k - \frac{1}{2})] \quad (8-2)$$

$$E_x^{n+1}(i + \frac{1}{2}, j, k) = E_{xy}^{n+1}(i + \frac{1}{2}, j, k) + E_{xz}^{n+1}(i + \frac{1}{2}, j, k) \quad (8-3)$$

$$H_{Nxy}^{n+1/2}(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}) = A_{py}(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}) \cdot H_{Nxy}^{n+1/2}(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}) - B_{py}(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}) \cdot [E_z^n(i, j + 1, k + \frac{1}{2}) - E_z^n(i, j, k + \frac{1}{2})] \quad (8-4)$$

$$H_{Nxz}^{n+1/2}(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}) = A_{pz}(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}) \cdot H_{Nxz}^{n+1/2}(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}) + B_{pz}(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}) \cdot [E_y^n(i, j + \frac{1}{2}, k + 1) - E_y^n(i, j, k)] \quad (8-5)$$

$$H_{Nx}^{n+1/2}(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}) = H_{Nxy}^{n+1/2}(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}) + H_{Nxz}^{n+1/2}(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}) \quad (6)$$

其中

$$A_{pq}(i, j, k) = \frac{1 - \sigma_{pq}(i, j, k)\Delta t/2\epsilon_0}{1 + \sigma_{pq}(i, j, k)\Delta t/2\epsilon_0}, \eta = x, y, z \quad (9)$$

$$B_{pq}(i, j, k) = \frac{1}{2[1 + \sigma_{pq}(i, j, k)\Delta t/2\epsilon_0]}, \eta = x, y, z \quad (10)$$

直角坐标系中 PML 是由六块平板构成的腔体(见图 1),腔体内为近场计算区域,腔体外为目标背景区(如自由空间).设总计算区域为 $i \in [I_{\min}, I_{\max}]$, $j \in [J_{\min}, J_{\max}]$, $k \in [K_{\min}, K_{\max}]$, PML 的起始边界分别为 $I_{p\min}$, $I_{p\max}$, $J_{p\min}$, $J_{p\max}$, $K_{p\min}$ 和 $K_{p\max}$. 以 E_x 为例,我们看一下它在六个 PML 平板区内的分裂情况.在与 x 方向相垂直的前后两个平板内,除去与上下、左右四个平板相叉部分外,仅有 σ_{px} 存在,由式(7)和(8)知道,不发生分裂,这意味该 PML 区对 E_x 分量不起作用.如此,针对 E_x 分量构造出新的 PML 子区应为,

子区 1(左): $i \in [I_{\min}, I_{\max} - 1]$, $j \in [J_{\min}, J_{p\max}]$, $k \in [K_{p\min} + 1, K_{p\max} - 1]$;

子区 2(右): $i \in [I_{\min}, I_{\max} - 1]$, $j \in [J_{p\min}, J_{\max}]$, $k \in [K_{p\min} + 1, K_{p\max} - 1]$;

子区 3(上): $i \in [I_{\min}, I_{\max} - 1]$, $j \in [J_{p\min} + 1, J_{p\max} - 1]$, $k \in [K_{p\min} + 1, K_{p\max} - 1]$;

子区 4(下): $i \in [I_{\min}, I_{\max} - 1]$, $j \in [J_{p\min} + 1, J_{p\max} - 1]$, $k \in [K_{\max}, K_{p\min}]$;

子区 5(上左交叉): $i \in [I_{\min}, I_{\max} - 1]$, $j \in [J_{\min}, J_{p\min}]$, $k \in [K_{p\max}, K_{\max}]$;

子区 6(上右交叉): $i \in [I_{\min}, I_{\max} - 1]$, $j \in [J_{p\max}, J_{\max}]$, $k \in [K_{p\max}, K_{\max}]$;

子区 7(下左交叉): $i \in [I_{\min}, I_{\max} - 1]$, $j \in [J_{\min}, J_{p\min}]$, $k \in [K_{\min}, K_{p\min}]$;

子区 8(下右交叉): $i \in [I_{\min}, I_{\max} - 1]$, $j \in [J_{p\max}, J_{\max}]$, $k \in [K_{\min}, K_{p\min}]$;

共计八个子区,其中子区 1、2 中仅有 σ_{px} 存在,子区 3、4 中仅有 σ_{px} 存在,而子区 5~8 中 σ_{py} 和 σ_{pz} 同时存在.且有 $E_x(i, j, \frac{K_{\min}}{K_{\max}}) = 0$, $E_x(1, \frac{J_{\min}}{J_{\max}}, k) = 0$. 同理,对于其它五个电磁场分量可分别构造出相对应的八个 PML 子区.容易看出,这种按场分量构造的 PML 区没有角区,便于程序实现.

由于分裂场子分量在当前位置随时间步进,所以象场分

量一样必须对其事先开辟存储空间(数组).为减小子分量存储空间、有效利用计算机资源,可采用降维方法对其进行存储.子分量仅存在于 PML 中,利用线性关系把三

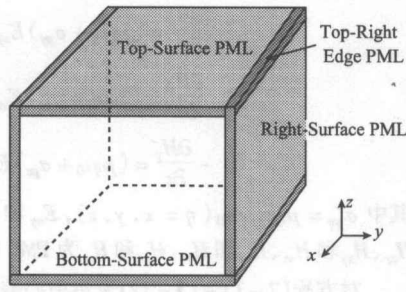


图 1 PML 构造

维子分量转换为二维或一维数组是可行的.这里仅给出相对简单的子分量二维存储方法.以 E_x 为例,可设置数组 $E_{xy}(1:8, M)$ 和 $E_{xz}(1:8, M)$,其中 1:8 代表上述八个 PML 子区, M 为每一个子区内离散格点总数,如对于子区 1,

$$M = (I_{\max} - 1 - I_{\min}) \times (J_{p\min} - J_{\min}) \times (K_{p\max} - K_{p\min} - 2) \quad (11)$$

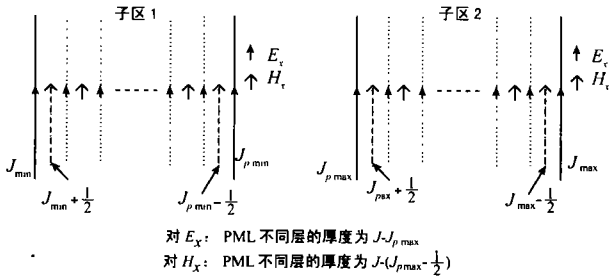


图 2 电磁场分量在 PML 中的相对位置

注意到电场子分量与磁场子分量空间位置差异.以 E_x 和 H_x 为例,按照 Yee 氏网格^[5],它们的空间位置为 $E_x(i + \frac{1}{2}, j, k)$ 和 $H_x(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2})$,在 PML 内的分布如图 2 所示.

3 数值计算结果

首先,对上述 PML 的吸收性能进行检验.仿照二维吸收边界条件性能测试方法^[6],设三维试验空间 Ω_T 的网格数为 $100 \times 100 \times 50$,外围 8 层 PML 或设置二阶 Mur 吸收边界条件(ABC).基础空间 Ω_B 的网格数为 $140 \times 140 \times 90$.在 $(0, 0, 0)$ 点处设置脉冲源,其形式为

$$E_x = (0, 0, 0) = \begin{cases} \frac{1}{320} \left(10 - 15 \cos \frac{2\pi t}{\tau} + 6 \cos \frac{4\pi t}{\tau} - \cos \frac{6\pi t}{\tau} \right) & t \leq \tau \\ 0 & t > \tau \end{cases} \quad (12)$$

其中 $t = n\Delta t, \tau = 10^{-9}$.计算中取 $\Delta t = 2.5 \times 10^{-11} s, \Delta x = \Delta y = \Delta z = 2c_0\Delta t, C_0$ 为自由空间中的光速.另外,取理论反射系数 $R_{th} = 10^{-10}$.图 3 为 $n = 100$ 时电场分量沿 x 方向本地误差 (LE)分布.本地误差的定义为

$$LE(i) = E_{\Omega_T}^n(i, 0, 24) - E_{\Omega_B}^n(i, 0, 24) \quad -50 \leq i \leq 49 \quad (13)$$

$E_{\Omega_T}^n$ 和 $E_{\Omega_B}^n$ 分别表示空间 Ω_T 和 Ω_B 空间的电场值.

图 3 表明,由二阶 Mur 吸收边界条件反射引起的本地误差量级为 10^{-5} ,而由 6 层 PML 反射引起的本地误差量级为

10^{-7} ,8 层 PML 为 10^{-8} ,即约 -160dB 这一结果优于文[6]中二维 PML 测试结果,与文[7]中三维 16 层 PML 测试结果相当.

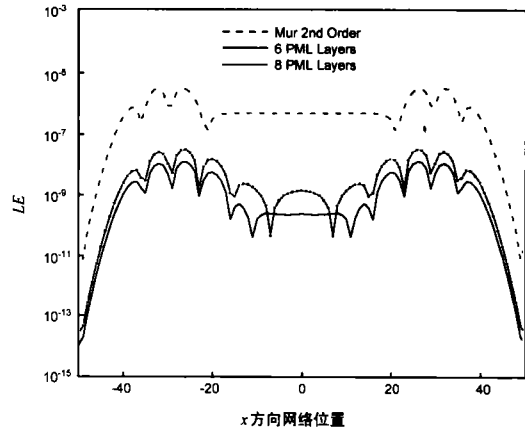


图 3 PML 数值测试结果

下面应用新构造的 PML 结合 FDTD 方法,对一个散射问题进行模拟计算.设散射体为一个金属球,其半径为 12m.入射波是高斯脉冲(最大频率为 30MHz),计算中取离散网格长度 $\Delta x = \Delta y = \Delta z = \Delta s$,时间步长 $\Delta t = 0.5\Delta s/c$ (c 为光速),8 层 PML 且理论反射系数 $R_{th} = 10^{-10}$.图 4 为该金属球垂直极化后向散射截面计算结果.可以看出,由于台阶化近似,FDTD 结果与 Mie 级数解有所差别,但随着离散网格的细化误差越来越小.该例子中,总计算空间离散网格数(按计算 $\Delta s = 0.4\text{m}$)为

$$(N_{xx} + 30) \times (N_{yy} + 30) \times (N_{zz} + 30) = 60 \times 60 \times 60$$

其中 $N_{xx} \times N_{yy} \times N_{zz}$ 为金属球离散网格数,30 代表总场边界、近远场外推边界和 PML 之和.若采用二阶 Mur 吸收边界条件,则总计算空间离散网格数要大得多,因为二阶 Mur 吸收边界要求离开散射体至少一个波长的距离^[8].

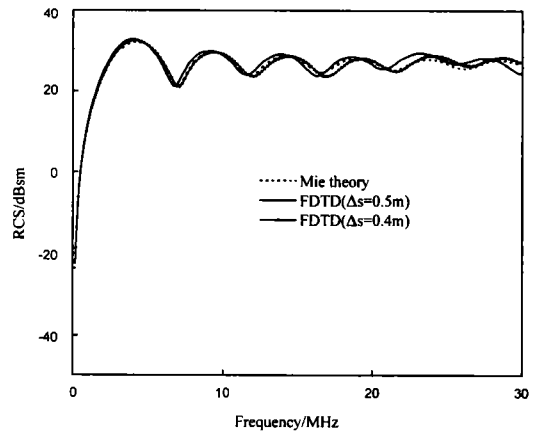


图 4 金属球后向散射截面

4 结论

按分裂场分量构造的新 PML 结构仅有八个子区,与通常包括角区的 26 个子区相比,既简单又容易程序实现.采用降维方法对分裂场分量进行存储,能有效节省计算资源.三维数

值测试结果表明,构造的八层 PML 反射本地误差约为 -160dB.另外,金属球散射截面模拟计算结果证实了新 PML 构造的实用性.

参考文献:

- [1] J P Berenger. A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves [J]. *J Comp Phys*, 1996, 114(2): 2216 - 2222.
- [2] G Mur. Absorbing boundary condition for the FD application of the time-domain EM field equation [J]. *IEEE Trans EMC*, 1981, 23(4): 377 - 382.
- [3] S D Gedney. An anisotropic perfectly matched layer absorbing medium for the truncation of FDTD lattices [J]. *IEEE Trans Antennas and Propagat*, 1996, 44(12): 1630 - 1639.
- [4] W C Chew, W H Weedon. A 3-D perfectly matched medium from modified Maxwell's equations with stretched coordinates [J]. *Microwave Opt Tech Lett*, 1994, 7: 599 - 604.
- [5] 王长清, 祝西里. 电磁场计算中的时域有限差分法 [M]. 北京: 北京大学出版社, 1994.
- [6] D S Katz, E T Thiele, A Taflove. Validation and extension to three dimensions of the berenger PML absorbing boundary condition for FD-TD meshes [J]. *IEEE Microwave and Guided Wave Lett*, 1994, 4(8): 268 - 270.
- [7] W V Andrew, C A Balanis, P A Tirkas. A comparison of the berenger perfectly matched layer and the lindman higher-order ABC's for the FDTD method [J]. *IEEE Microwave and Guided Wave Lett*, 1994, 5(6): 192 - 194.
- [8] T G Moore, J G Blaschak, A Taflove, G A Kriegsmann. Theory and application of radiation boundary operators [J]. *IEEE Trans Antennas Propagat*, 1988, 36(12): 1797 - 1812.

作者简介:

李清亮 男, 1963 年生于河南开封. 1984、1991、1998 年分别获兰州大学物理系理学学士、中国电波传播研究所工学硕士和西安电子科技大学工学博士. 现为中国电波传播研究所副总工程师, 主要从事电磁散射、电波传播和电磁数值计算方法研究.